

Geração de redes complexas com comunidades sobrepostas e comunidades hierárquicas

Aluno: Gustavo Henrique Spiess

Orientador: Aurélio Faustino Hoppe

Roteiro

- Introdução
- Objetivos
- Fundamentação teórica
- Trabalhos correlatos
- Descrição do modelo
- Resultados experimentais
- Conclusões e extensões

Introdução

- Grafos
- Redes complexas
- Comunidades
- Modelos de geração de redes complexas

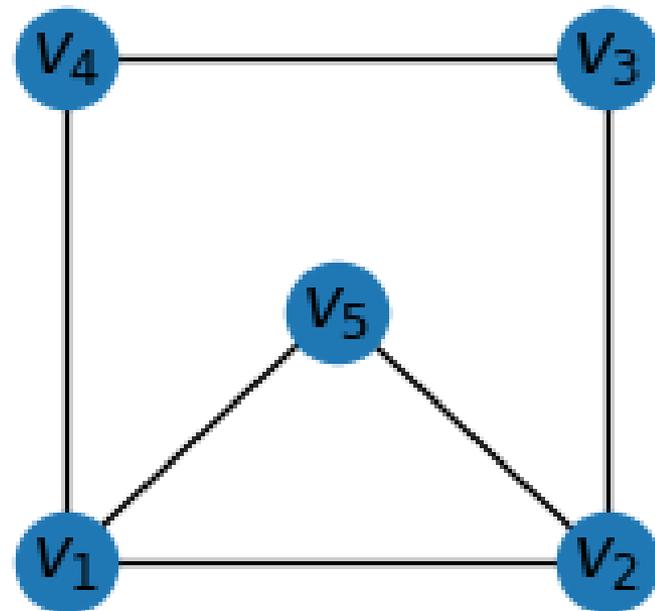
Introdução

- Grafos

$$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$$

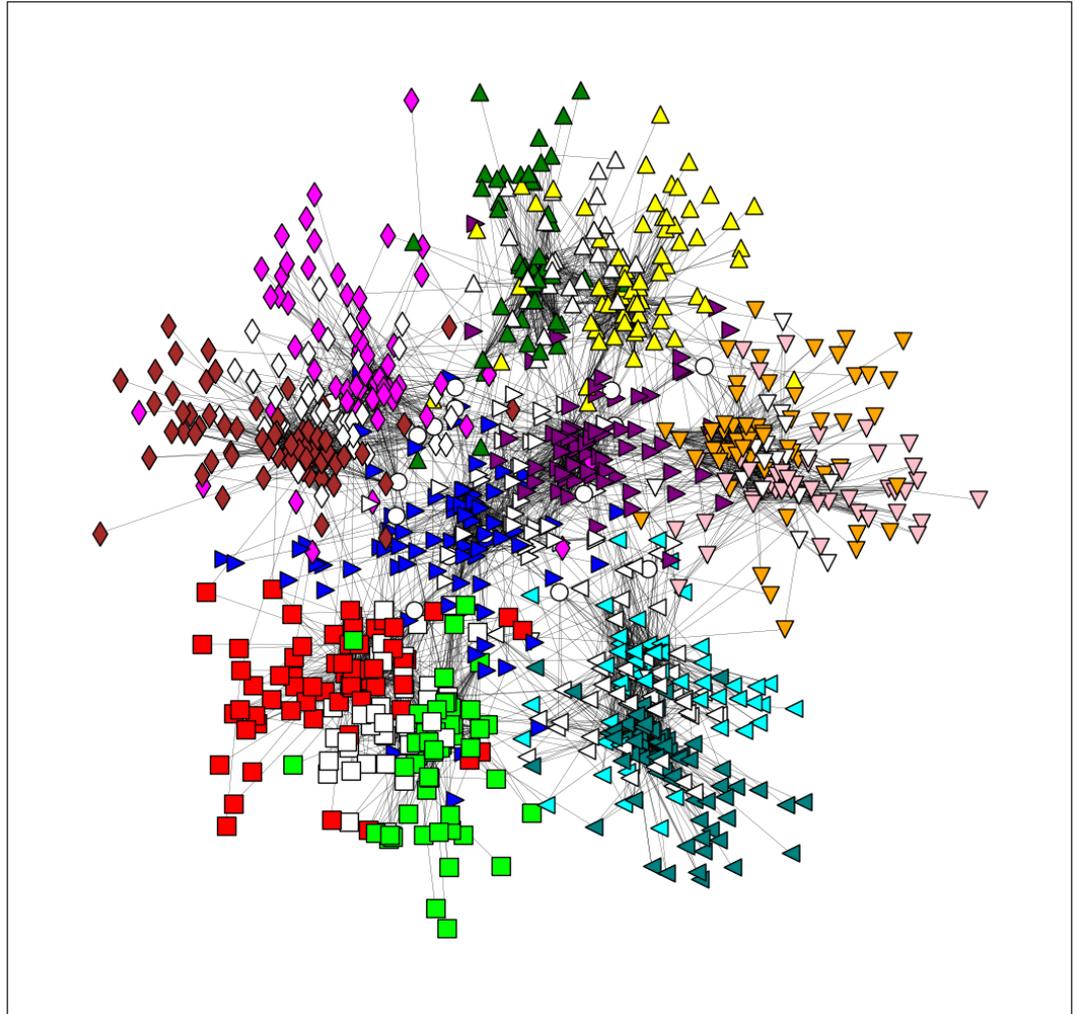
$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$\mathcal{E} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \\ \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}\}$$



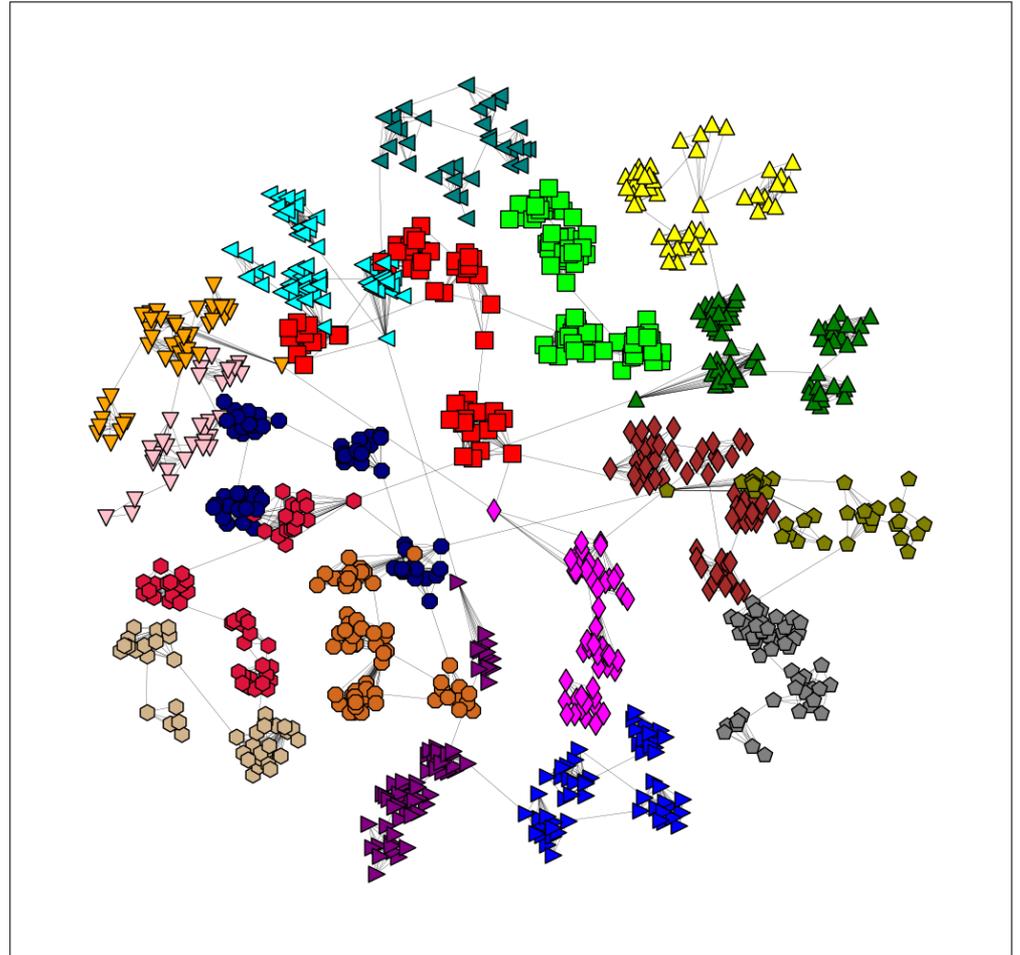
Introdução

- Redes Complexas



Introdução

- Comunidades em redes complexas



Introdução

- Modelos de geração de redes complexas
 - Presença de propriedades
 - *Ground Truth*
 - Avaliação de algoritmos de detecção
 - Geração de dados para emulações e treinamento de sistema de aprendizagem de máquina

Objetivos

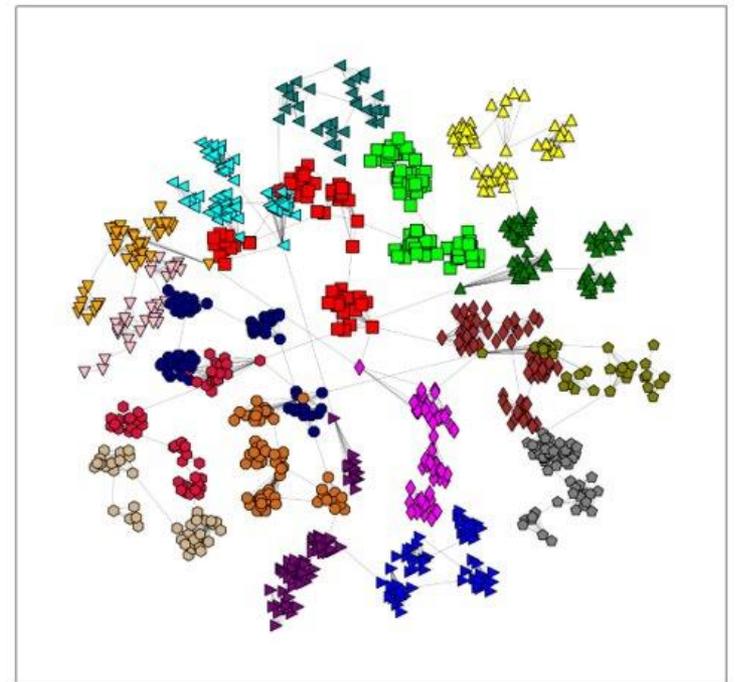
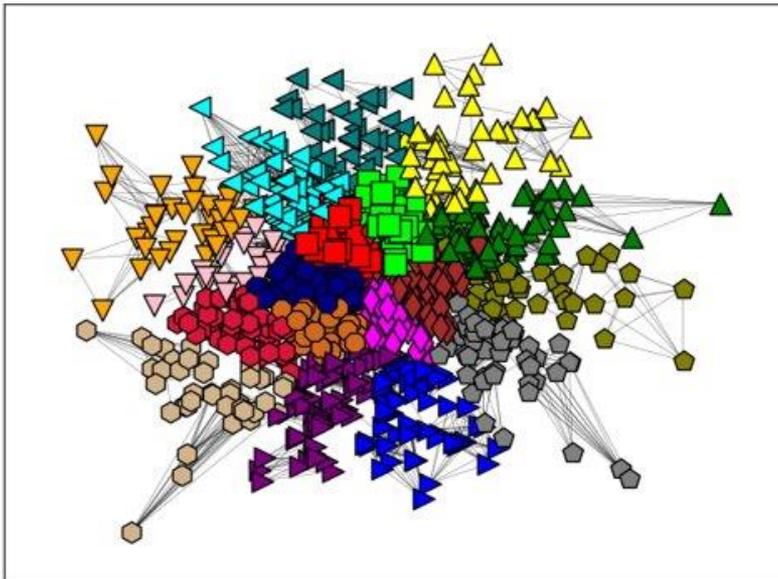
- Construir um modelo de geração algorítmica de redes complexas com comunidades hierarquicamente organizadas e com comunidades sobrepostas

Objetivos

- Construção de um modelo algorítmico de geração de redes complexas que inclua a propriedade de comunidades.
- a especificação de uma *ground truth* de quais vértices pertencem a quais comunidades.
- a presença de comunidades hierárquicas e de comunidades sobrepostas nos grafos gerados.
- a representação dos vértices como uma nuvem de pontos, para a definição de semelhança de vértices por distância.

Fundamentação Teórica

- Definição de comunidade
 - Contextual
 - Global
 - Local
 - Semelhança de vértice



Fundamentação Teórica

- Modularidade

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{K_i K_j}{2m} \right) \delta(C_i, C_j)$$

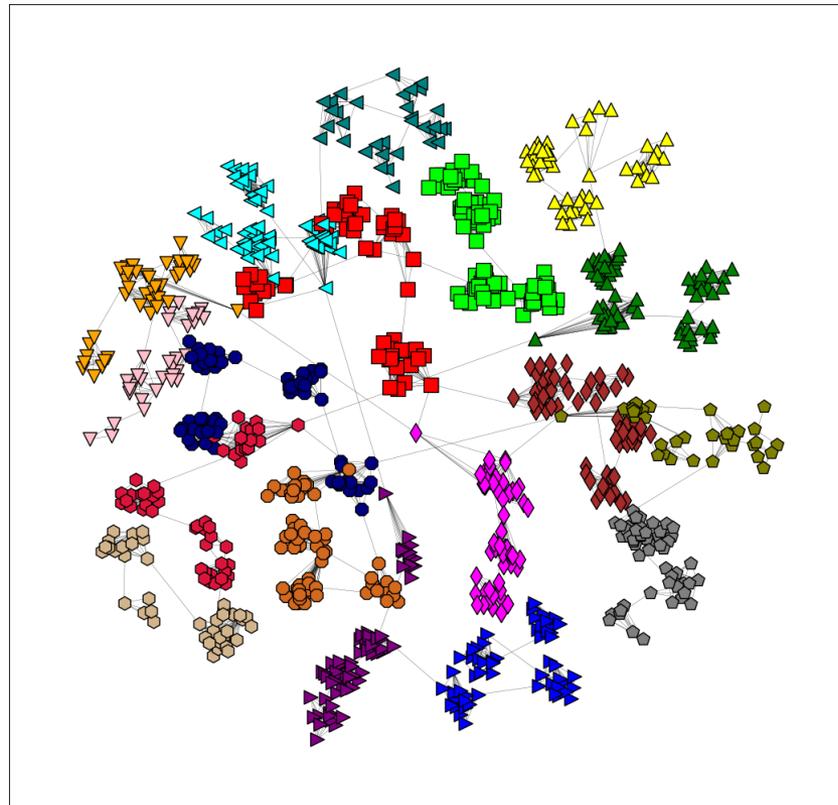
- Inércia

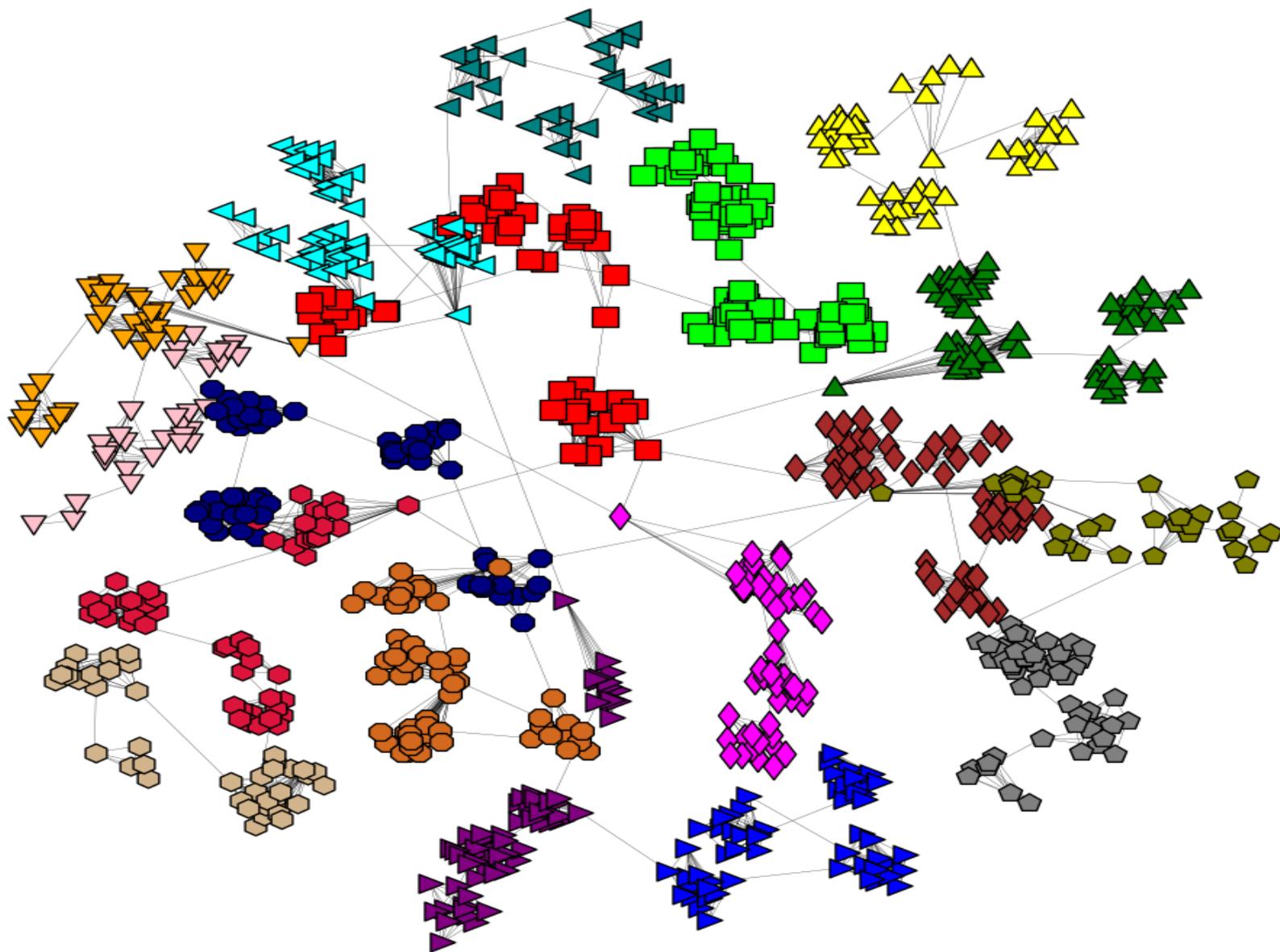
$$\sum_{v \in C} |g - v|^2$$

- Homofilia

Fundamentação Teórica

- Comunidades sobrepostas
- Comunidades hierárquicas





Fundamentação Teórica

- Coeficiente de clusterização
- Mundo pequeno
- Distribuição de graus

Trabalhos Correlatos

- LARGERON, C. et al. **Generating attributed networks with communities.** PloS one, Public Library of Science, v. 10, n. 4, p. e0122777, 2015.
- AKOGLU, L.; FALOUTSOS, C. **Rtg: A recursive realistic graph generator using random typing.** In: SPRINGER. Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. [S.l.], 2009. p. 13–28.

Modelo

- Hipótese
 - Rede complexa
 - Comunidades sobrepostas
 - Comunidades hierárquicas
 - Comunidades homogêneas

Modelo

$$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n)$$

$$\mathcal{V} \subset \mathbb{Q}^p$$

$$\mathcal{E} \subset \{v_1, v_2 \mid v_1 \in \mathcal{V}, v_2 \in \mathcal{V}\}$$

$$C_0 \subset \{v \mid v \in \mathcal{V}\}$$

$$C_n = \{C_{n-1_0}, C_{n-1_1}, \dots, C_{n-1_m}\}$$

Modelo

- Representação de um grafo parcial

$$\mathcal{G}_p = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n, R)$$

Modelo

- Notação
 - nível da comunidade
 - Vetores da comunidade
 - Expansão da comunidade

L_C

V_C

$\text{flat}(C)$

Modelo

• Parâmetros do modelo: $N \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$

$$E_{\text{wth}}^{\max} \in \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq 1\}$$

$$E_{\text{btw}}^{\max} \in \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq 1\}$$

$$MTE \in \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 1\}$$

$$\mathcal{A} \in \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}^{|\mathcal{A}|}$$

$$K \in \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 2\}^{|\mathcal{K}|}$$

$$\theta \in \{t \in \mathbb{Q} \mid 0 \geq t \geq 1\}$$

$$\text{NbRep} \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

Modelo

- Inicialização dos vértices e das comunidades
- Processamento dos vértices
- Adição final de arestas

Modelo

- Inicialização dos vértices e das comunidades

```
1 Output:  $\mathcal{G}_p = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n, R)$ 
2  $\mathcal{V} \leftarrow \emptyset$ 
3  $\mathcal{E} \leftarrow \emptyset$ 
4 while  $|\mathcal{V}| < N$  do
5 begin
6    $v \leftarrow (\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathcal{A}_0}), \mathcal{N}(0, \sigma_{\mathcal{A}_1}), \dots, \mathcal{N}(1, \sigma_{\mathcal{A}_{|\mathcal{A}|-1}}))$ 
7    $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{v\}$ 
8 end
9 Function  $\text{cover}(l, p)$ 
10 begin
11   if  $l = |K|$  then
12     begin
13       for  $v \in p$  do
14         begin
15            $p' \leftarrow \{v' \in p \mid \{v, v'\} \notin \mathcal{E} \wedge \{v, v'\} \notin \mathcal{E} \wedge v' \neq v\}$ 
16            $s \leftarrow \text{RandUni}([1, |p'|])$ 
17           for  $v' \in \text{Sample}(p', s)$  do  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup (v, v')$ 
18         end
19       return  $p$ 
20     end
21      $s \leftarrow \text{NbRep} \times \prod_{i=l}^{|K|-1} K_i$ 
22      $p' \leftarrow \text{Sample}(p, \min\{s, |p|\})$ 
23      $k \leftarrow \text{K Medoids}(p', K_l)$ 
24      $c \leftarrow \{\text{cover}(l+1, q) \mid q \in k\}$ 
25      $p' \leftarrow \{\text{RandUni}(c') \mid c' \in V_c\}$ 
26      $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup \{\{p'_i, p'_{i+1}\} \mid i \in \{1, 2, \dots, |p'| - 1\}\}$ 
27     return  $c$ 
28 end
29  $C_n = \text{cover}(0, \mathcal{V})$ 
30
31 for  $C_i \in \text{flat}(C_n)$  do
32   if  $C_i = \text{flat}(C_i)$  then  $R_{C_i} \leftarrow C_i$ 
33   else  $R_{C_i} \leftarrow \emptyset$ 
34  $\mathcal{G}_p \leftarrow (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n, R)$ 
35 return  $\mathcal{G}_p$ 
```

Modelo

- Inicialização dos vértices e das comunidades

while $|\mathcal{V}| < N$ **do**

begin

$v \leftarrow (\mathcal{N}(0, \sigma_{\mathcal{A}_0}), \mathcal{N}(0, \sigma_{\mathcal{A}_1}), \dots, \mathcal{N}(1, \sigma_{\mathcal{A}_{|\mathcal{A}|-1}}))$

$\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{v\}$

end

Modelo

- Inicialização dos vértices e das comunidades

```
Function cover( $l, p$ )  
begin  
  if  $l = |K|$  then  
    begin  
      for  $v \in p$  do  
        begin  
           $p' \leftarrow \{v' \in p \mid \{v, v'\} \notin \mathcal{E} \wedge \{v, v'\} \notin \mathcal{E} \wedge v' \neq v\}$   
           $s \leftarrow \text{RandUni}([1, |p'|])$   
          for  $v' \in \text{Sample}(p', s)$  do  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup (v, v')$   
        end  
      return  $p$   
    end  
end
```

Modelo

- Inicialização dos vértices e das comunidades

$$s \leftarrow \text{NbRep} \times \prod_{i=l}^{|K|-1} K_i$$

$$p' \leftarrow \text{Sample}(p, \min \{ s, |p| \})$$

$$k \leftarrow \text{K Medoids}(p', K_l)$$

$$c \leftarrow \{ \text{cover}(l+1, q) \mid q \in k \}$$

$$p' \leftarrow \{ \text{Rand}_{\text{Uni}}(c') \mid c' \in V_c \}$$

$$\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup \{ \{ p'_i, p'_{i+1} \} \mid i \in \{ 1, 2, \dots, |p'| - 1 \} \}$$

return c

Modelo

- Inicialização dos vértices e das comunidades

```
for  $C_i \in \text{flat}(C_n)$  do  
    if  $C_i = \text{flat}(C_i)$  then  $R_{C_i} \leftarrow C_i$   
    else  $R_{C_i} \leftarrow \emptyset$   
 $\mathcal{G}_p \leftarrow (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n, R)$   
return  $\mathcal{G}_p$ 
```

Modelo

- Processamento dos vértices

```
1 Output:  $B \subset \{B' \mid B' \subset \mathcal{V}\}$ 
2
3  $B' \leftarrow \{v \in \mathcal{V} \mid \neg \exists v' (\{v, v'\} \in \mathcal{E})\}$ 
4  $B_s \leftarrow \left\lceil \frac{\text{flat}(C_n)}{2} \right\rceil$ 
5  $B'_s \leftarrow (B_s, 2B_s, 4B_s, \dots, \lceil \log_2 \frac{5000}{B_s} \rceil B_s)$ 
6  $B \leftarrow \emptyset$ 
7 for  $s \in B'_s$  do
8 begin
9    $B_i \leftarrow \text{sample}(B', s)$ 
10   $B' \leftarrow B' \setminus B_i$ 
11   $B \leftarrow B \cup B_i$ 
12 end
13 while  $|B'| > 5000$  do
14 begin
15   $B_i \leftarrow B \cup \{\text{sample}(B', \text{RandUni}(5000, 5001, 5002, \dots, 10000))\}$ 
16   $B' \leftarrow B' \setminus B_i$ 
17   $B \leftarrow B \cup B_i$ 
18 end
19  $B \leftarrow B \cup B'$ 
```

```
1 Function  $\text{edgesWithin}(v, \mathcal{G}_p, C, n)$ 
2    $m \leftarrow \min(E_{\text{wth}}^{\max}, |V_C|)$ 
3    $e \leftarrow \text{RandPL}(1, 2, 3, \dots, \lceil \sqrt[3]{m} \rceil)$ 
4    $W \leftarrow \emptyset$ 
5   for  $i \in \{1, 2, 3, \dots, e\}$  do  $W \leftarrow W \cup \{\text{RandEdgeWth}(V_C \setminus W)\}$ 
6   return  $\{\{v, u\} \mid u \in W\}$ 
7 end
```

```
1 Function  $\text{edgesBetween}(v, \mathcal{G}_p, C_c, n)$ 
2    $p' \leftarrow \text{flat}(C_n) \setminus C_c$ 
3    $p \leftarrow \bigcup_{C \in p'} \{C, r\} \mid r \in R_C\}$ 
4    $m \leftarrow \min(E_{\text{btw}}^{\max}, |p|, n)$ 
5    $e \leftarrow \text{RandPL}(0, 1, 2, \dots, m)$ 
6    $W \leftarrow \emptyset$ 
7   for  $i \in \{1, 2, 3, \dots, e\}$  do  $W \leftarrow W \cup \{\text{RandEdgeBtw}(p \setminus W)\}$ 
8   return  $\{\{v, u_0\} \mid u \in W\}$ 
9 end
```

```
1 Output:  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n)$ 
2
3 Function  $\text{introduce}(v, \mathcal{G}_p)$ 
4 begin
5    $C_c \leftarrow \text{chooseCommunities}(v, \mathcal{G}_p)$ 
6
7    $t_{\mathcal{E}} \leftarrow \emptyset$ 
8   for  $C_i \in C_c$  do  $t_{\mathcal{E}} \leftarrow t_{\mathcal{E}} \cup \text{edgesWithin}(v, \mathcal{G}_p, C_i, |C_c|)$ 
9    $t_{\mathcal{E}} \leftarrow t_{\mathcal{E}} \cup \text{edgesBetween}(v, \mathcal{G}_p, C_c, |t_{\mathcal{E}}|)$ 
10   $t_C \leftarrow \{(v, C_i) \mid C_i \in C_c\}$ 
11  return  $t_C, t_{\mathcal{E}}$ 
12 end
13
14 for  $b \in B$  do
15 begin
16   for  $v \in b$  do # esse laço pode ser realizado paralelamente
17   begin
18      $t_C, t_{\mathcal{E}} \leftarrow \text{introduce}(v, \mathcal{G})$ 
19      $T_C \leftarrow T_C \cup t_C$ 
20      $T_{\mathcal{E}} \leftarrow T_{\mathcal{E}} \cup t_{\mathcal{E}}$ 
21   end
22    $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup T_{\mathcal{E}}$ 
23    $C_n \leftarrow \text{buildCover}(C_n, T_C)$ 
24    $R \leftarrow \text{electRepresentants}(C_n)$ 
25 end
26  $\mathcal{G} \leftarrow (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n)$ 
27 return  $\mathcal{G}$ 
```

```
1 Function  $\text{chooseCommunities}(v, \mathcal{G}_p)$ 
2    $P \leftarrow$  o conjunto  $\{(C_i, r) \mid C_i \in \text{flat}(C_n) \mid r \in R_{C_i}\}$  ordenado pela função  $d$ 
3    $C \leftarrow \text{RandPL}(P)$ 
4    $(C', C'') \leftarrow (C, C)$ 
5   while  $C' \neq \text{flat}(C')$  do  $C' \leftarrow \text{RandPL}(\{p \in P \mid p_0 \in \text{flat}(C'_0) \wedge p \neq C'\})$ 
6   while  $C'' \neq \text{flat}(C'')$  do  $C'' \leftarrow \text{RandPL}(\{p \in P \mid p_0 \in \text{flat}(C''_0) \wedge p \neq C'' \wedge p \neq C'\})$ 
7   return  $\{C'_0, C''_0\}$ 
8 end
```

Modelo

- Processamento dos vértices

```
1 Output:  $B \subset \{B' \mid B' \subset \mathcal{V}\}$ 
2
3  $B' \leftarrow \{v \in \mathcal{V} \mid \neg \exists v' (\{v, v'\} \in \mathcal{E})\}$ 
4  $B_s \leftarrow \left\lfloor \frac{|\text{flat}(C_n)|}{2} \right\rfloor$ 
5  $B'_s \leftarrow (B_s, 2B_s, 4B_s, \dots, \lceil \log_2 \frac{5000}{B_s} \rceil B_s)$ 
6  $B \leftarrow \emptyset$ 
7 for  $s \in B'_s$  do
8 begin
9    $B_i \leftarrow \{ \text{sample}(B', s) \}$ 
10   $B' \leftarrow B' \setminus B_i$ 
11   $B \leftarrow B \cup B_i$ 
12 end
13 while  $|B'| > 5000$  do
14 begin
15   $B_i \leftarrow B \cup \{ \text{sample}(B', \text{Rand}_{\text{Uni}}(5000, 5001, 5002, \dots, 10000)) \}$ 
16   $B' \leftarrow B' \setminus B_i$ 
17   $B \leftarrow B \cup B_i$ 
18 end
19  $B \leftarrow B \cup B'$ 
```

Modelo

- Processamento dos vértices

Function introduce(v, \mathcal{G}_p)

begin

$C_c \leftarrow \text{chooseCommunities}(v, \mathcal{G}_p)$

$t_{\mathcal{E}} \leftarrow \emptyset$

for $C_i \in C_c$ **do** $t_{\mathcal{E}} \leftarrow t_{\mathcal{E}} \cup \text{edgesWithin}(v, \mathcal{G}_p, C_i, |C_c|)$

$t_{\mathcal{E}} \leftarrow t_{\mathcal{E}} \cup \text{edgesBetween}(v, \mathcal{G}_p, C_c, |t_{\mathcal{E}}|)$

$t_C \leftarrow \{ (v, C_i) \mid C_i \in C_c \}$

return $t_C, t_{\mathcal{E}}$

end

Modelo

- Processamento dos vértices

```
for  $b \in B$  do
begin
  for  $v \in b$  do # esse laço pode ser realizado paralelamente
  begin
     $t_C, t_{\mathcal{E}} \leftarrow \text{introduce}(v, \mathcal{G})$ 
     $T_C \leftarrow T_C \cup t_C$ 
     $T_{\mathcal{E}} \leftarrow T_{\mathcal{E}} \cup t_{\mathcal{E}}$ 
  end
   $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup t_{\mathcal{E}}$ 
   $C_n \leftarrow \text{buildCover}(C_n, T_C)$ 
   $R \leftarrow \text{electRepresentants}(C_n)$ 
end
 $\mathcal{G} \leftarrow (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n)$ 
```

Modelo

- Processamento dos vértices

$$d(v, v') = (1 - \theta)|v - v'| + \theta|v_a - v'_a| \quad x \mapsto \frac{x^{-2}}{\sum_{i=1}^m i^{-2}}$$

```
1 Function chooseCommunities( $v, \mathcal{G}_p$ )
2    $P \leftarrow$  o conjunto  $\{(C_i, r) \mid C_i \in \text{flat}(C_n) \mid r \in R_{C_i}\}$  ordenado pela função  $d$ 
3    $C \leftarrow \text{Rand}_{\text{PL}}(P)$ 
4    $(C', C'') \leftarrow (C, C)$ 
5   while  $C' \neq \text{flat}(C')$  do  $C' \leftarrow \text{Rand}_{\text{PL}}(\{p \in P \mid p_0 \in \text{flat}(C'_0) \wedge p \neq C'\})$ 
6   while  $C'' \neq \text{flat}(C'')$  do  $C' \leftarrow \text{Rand}_{\text{PL}}(\{p \in P \mid p_0 \in \text{flat}(C''_0) \wedge p \neq C'' \wedge p \neq C'\})$ 
7   return  $\{C'_0, C''_0\}$ 
8 end
```

Modelo

- Processamento dos vértices

```
1 Function edgesWithin( $v, \mathcal{G}_p, C, n$ )  
2    $m \leftarrow \min(E_{\text{wth}}^{\max}, |V_C|)$   
3    $e \leftarrow \text{Rand}_{\text{PL}}(1, 2, 3, \dots, \lceil \sqrt[n]{m} \rceil)$   
4    $W \leftarrow \emptyset$   
5   for  $i \in \{1, 2, 3, \dots, e\}$  do  $W \leftarrow W \cup \{ \text{Rand}_{\text{EdgeWth}}(V_C \setminus W) \}$   
6   return  $\{ \{v, u\} \mid u \in W \}$   
7 end
```

$$u \mapsto \frac{\deg(u)}{\sum_{u' \in W} \deg(u')}$$

Modelo

- Processamento dos vértices

```
1 Function edgesBetween( $v, \mathcal{G}_p, C_c, n$ )  
2    $p' \leftarrow \text{flat}(C_n) \setminus C_c$   
3    $p \leftarrow \bigcup_{C \in p'} \{ \{ C, r \} \mid r \in R_C \}$   
4    $m \leftarrow \min(E_{\text{btw}}^{\max}, |p|, n)$   
5    $e \leftarrow \text{Rand}_{\text{PL}}(0, 1, 2, \dots, m)$   
6    $W \leftarrow \emptyset$   
7   for  $i \in \{ 1, 2, 3, \dots, e \}$  do  $W \leftarrow W \cup \{ \text{Rand}_{\text{EdgeBtw}}(p \setminus W) \}$   
8   return  $\{ \{ v, u_0 \} \mid u \in W \}$   
9 end
```

$$u \mapsto \frac{d(v, u)^{-1}}{\sum_{u' \in W} d(v, u')^{-1}}$$

Modelo

- Adição final de arestas

```
1 Output:  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, C_n)$ 
2
3  $l \leftarrow \max(\{L_C \mid C \in \text{flat}(C_n)\})$ 
4 while  $|\mathcal{E}| < MTE \wedge \mathcal{G} \neq K_{|\mathcal{V}|}$  do
5 begin
6    $T \leftarrow \{\{v, v'\} \mid v, v', v'' \in \mathcal{V} \mid \{v, v''\} \in \mathcal{E} \wedge \{v', v''\} \in \mathcal{E} \wedge \{v, v'\} \notin \mathcal{E}\}$ 
7    $T' \leftarrow \{e \in T \mid \exists C \in \text{flat}(C_n) (\forall v \in e (v \in C) \wedge L_C = l)\}$ 
8   if  $T' = \emptyset$  then  $l \leftarrow l - 1$ 
9   else  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup \{\text{RandUni}(T')\}$ 
10 end
```

Análise dos Resultados

- Modularidade
- Inércia
- Homofilia
- Visualização

Análise dos Resultados

- Modularidade

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \frac{K_i K_j}{2m} \right) \delta(C_i, C_j)$$

$$EQ = \frac{1}{2m} \sum_i \sum_{v \in C_i, w \in C_i} \frac{1}{O_v O_w} \left[A_{vw} - \frac{K_v K_w}{2m} \right]$$

Análise dos Resultados

- Modularidade

N	E_{wth}^{max}	E_{btw}^{max}	MTE	\mathcal{A}	K	θ	NbRep
1000	45	3	7000	(1, 1)	(6, 2)	1/10	20

Execução	EQ_1	EQ_2	O_1	O_2
B_0	0,71695	0,79204	16	235
B_1	0,72441	0,79760	18	211
B_2	0,70039	0,79391	14	252
B_3	0,73633	0,79622	13	190
B_4	0,71758	0,78549	26	235
B_5	0,73179	0,79201	33	224
B_6	0,74779	0,79828	15	213
B_7	0,73912	0,80411	20	200
B_8	0,74237	0,80504	19	194
B_9	0,71339	0,79877	17	237
Média	0,73701	0,79635	19	219

$$K = (9, 2, 2, 2)$$

Execução	EQ_1	EQ_2	EQ_3	EQ_4	O
M_0	0,96702	0,95833	0,93128	0,87673	0
M_1	0,96721	0,95979	0,93388	0,88221	0
M_2	0,96514	0,95933	0,93357	0,87722	0
M_3	0,96541	0,95711	0,92974	0,87888	0
M_4	0,96672	0,95868	0,93582	0,88090	0
Média	0,96630	0,95865	0,93286	0,87919	0

Análise dos Resultados

- Modularidade

Execução	K	Média de EQ
M_5	(5, 5, 5)	0,77889
M_6	(2, 4, 8)	0,77721
M_7	(8, 2, 4)	0,92434
M_8	(100)	0,95152
M_9	(3)	0,49024

Análise dos Resultados

- Inércia e Homofilia

Execução	I_1/I_0	I_2/I_0	$I_1 + I_2/2I_0$	H_r/H_c
B_0	0,38193	0,34155	0,36174	0,45942
B_1	0,34067	0,30168	0,32118	0,45920
B_2	0,34262	0,29697	0,31980	0,49265
B_3	0,35961	0,29986	0,32974	0,48305
B_4	0,41670	0,37592	0,39631	0,52725
B_5	0,35321	0,28246	0,31784	0,46047
B_6	0,37795	0,29310	0,33553	0,46127
B_7	0,35209	0,29903	0,32556	0,45348
B_8	0,36251	0,32820	0,34536	0,46364
B_9	0,36874	0,32936	0,34905	0,50499
Média	0,36560	0,31481	0,34021	0,47654

$$I_t = \sum_{c \in C_t} \frac{\sum_{v \in c} |v - g_c|^2}{|c|}$$

Análise dos Resultados

- Inércia e Homofilia

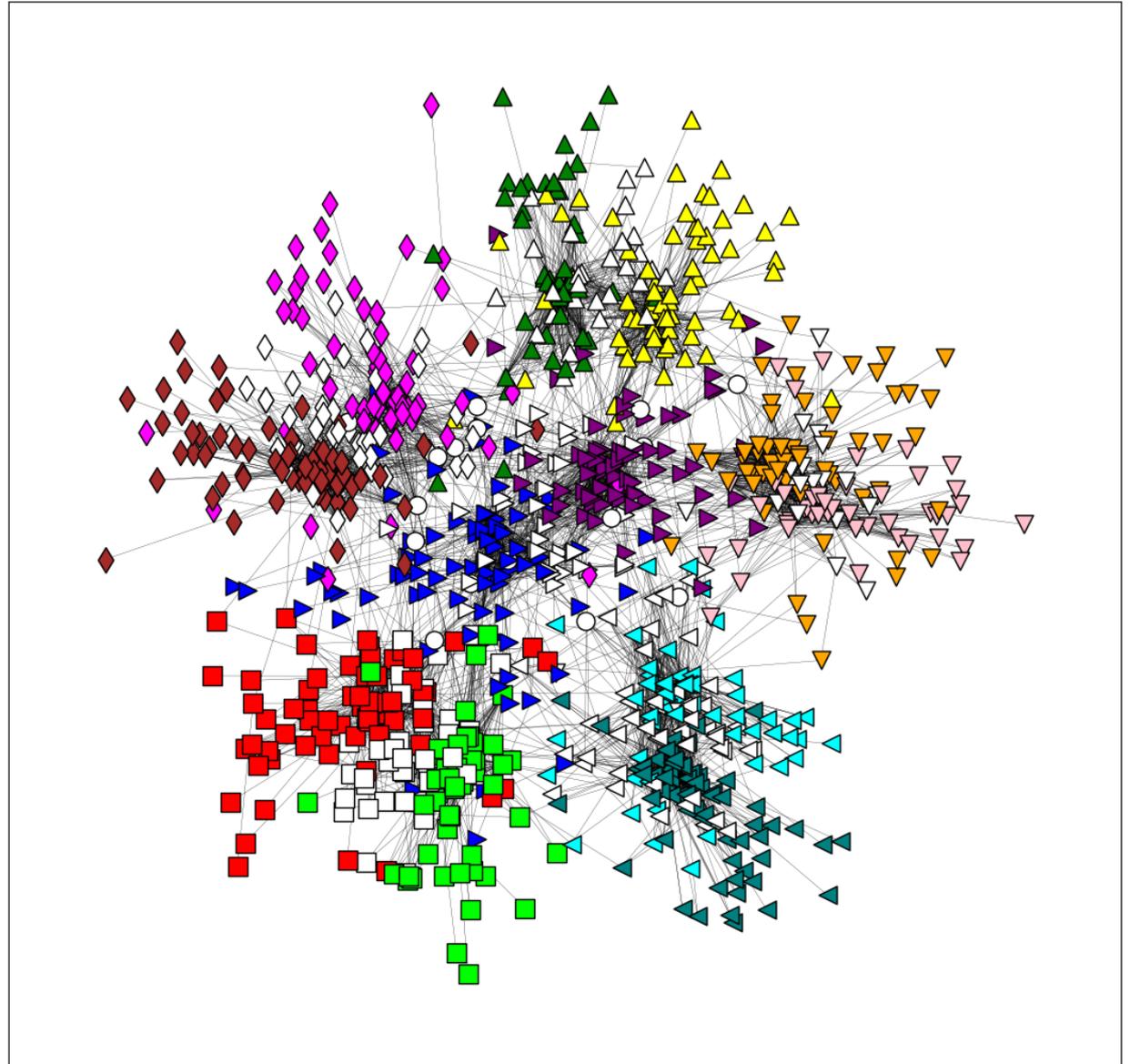
$K = (9, 2, 2, 2)$

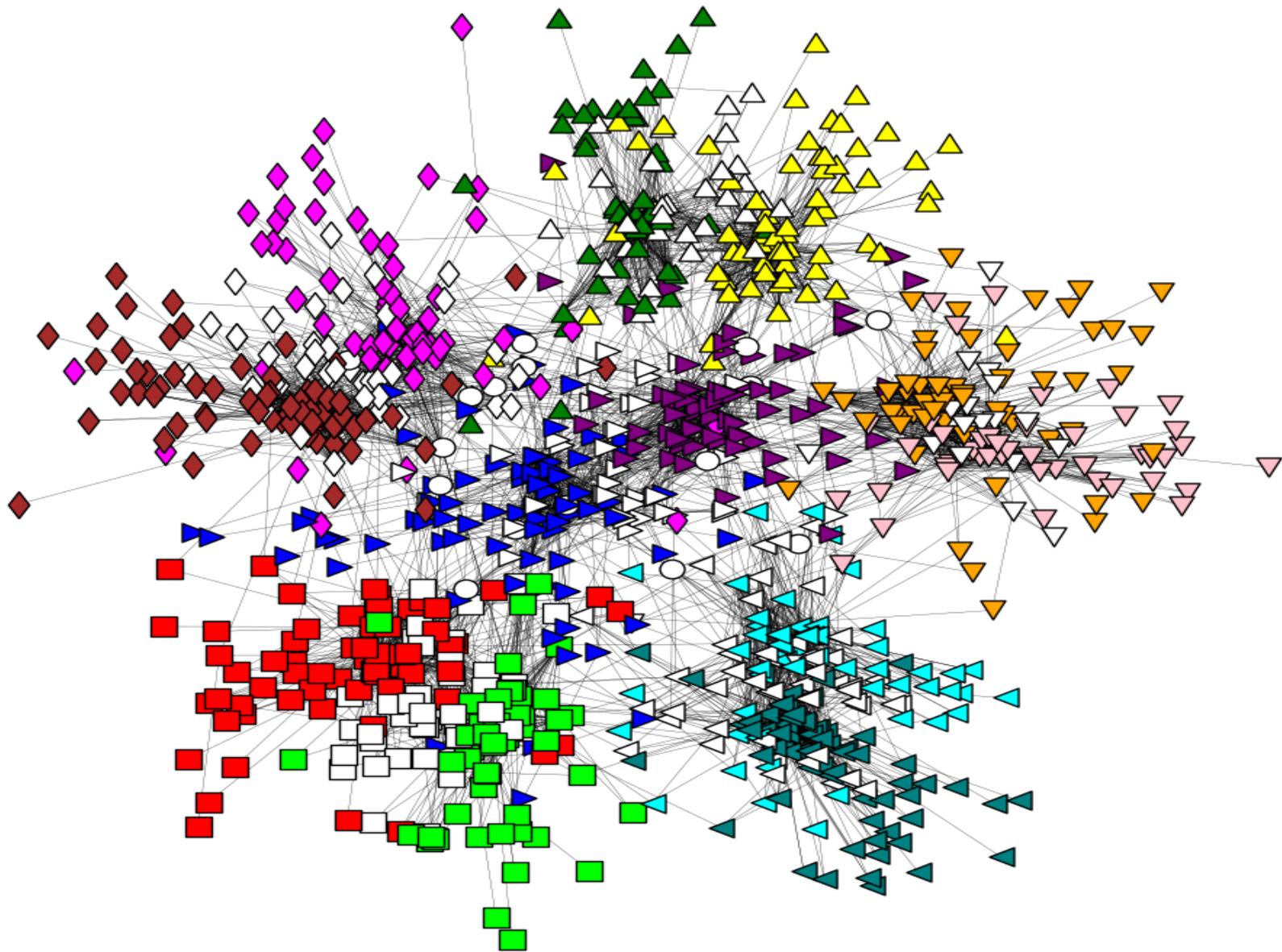
Execução	I_1/I_0	I_2/I_0	I_3/I_0	I_4/I_0	H_r/H_e
M_0	0,18740	0,11020	0,05650	0,03240	0,15975
M_1	0,18766	0,11563	0,06017	0,03277	0,16491
M_2	0,18446	0,11812	0,05993	0,03526	0,17281
M_3	0,18566	0,11307	0,06003	0,03169	0,16211
M_4	0,18111	0,11163	0,05563	0,03016	0,16158
Média	0,18526	0,11373	0,05845	0,03246	0,16423

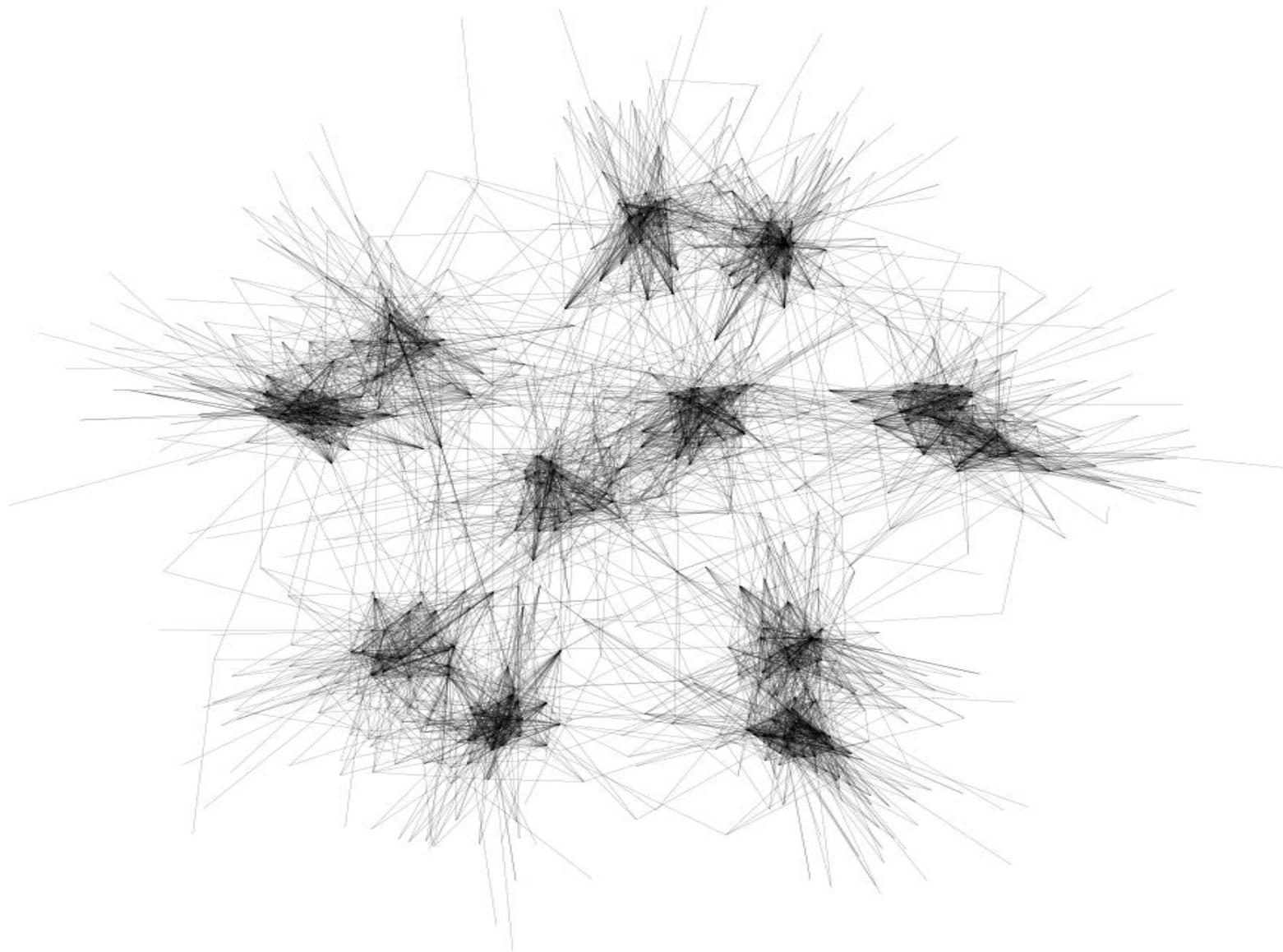
Execução	θ	I_1/I_0	I_2/I_0	Média
I_0	1,00	0,78255	0,73782	0,71637
I_1		0,70558	0,67610	
I_2		0,70773	0,68841	
I_3	0,66	0,40448	0,34173	0,36539
I_4		0,40280	0,33749	
I_5		0,37041	0,33541	
I_6	0,33	0,34582	0,29460	0,34005
I_7		0,36632	0,30172	
I_8		0,40126	0,33059	

Análise dos Resultados

- Visualização

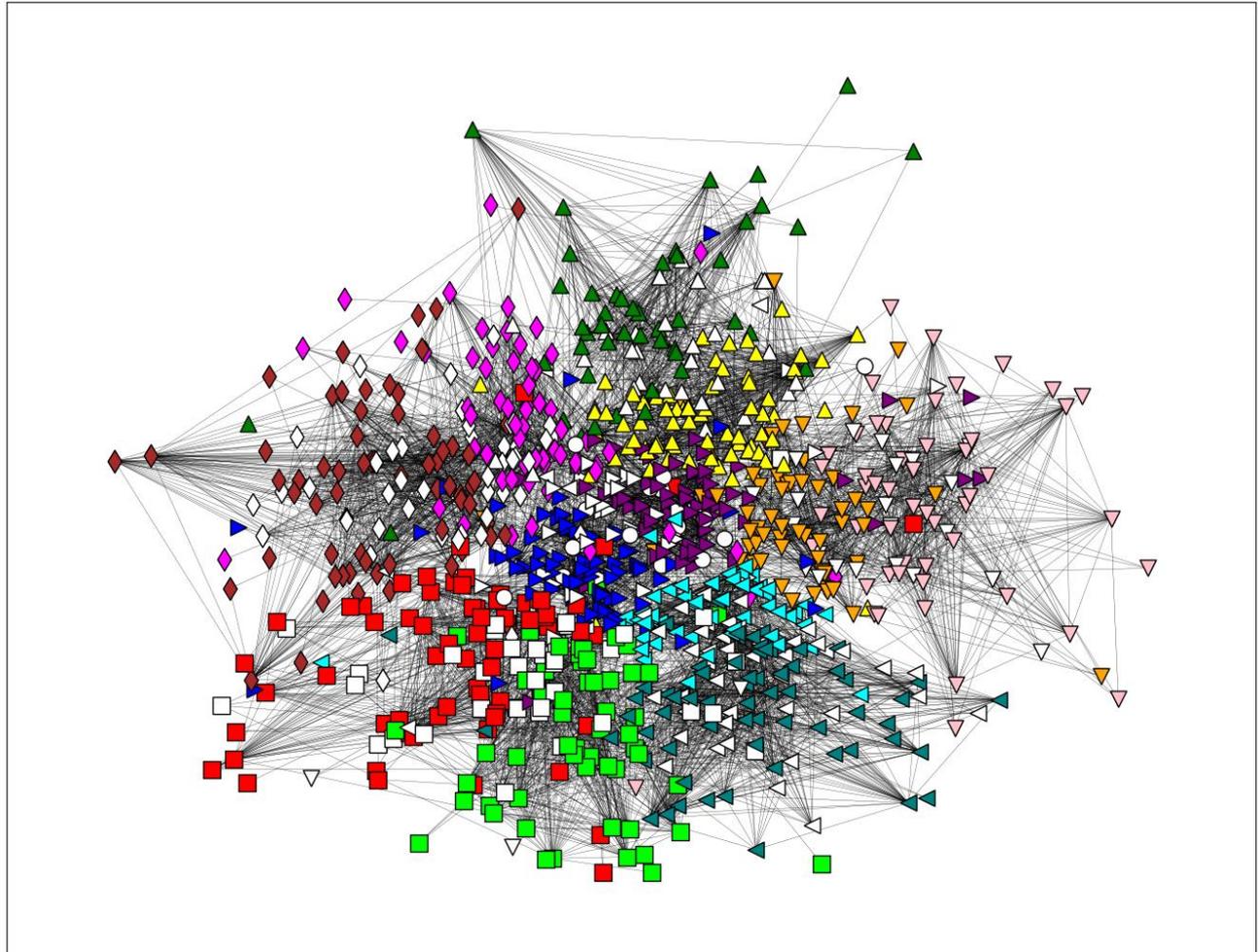


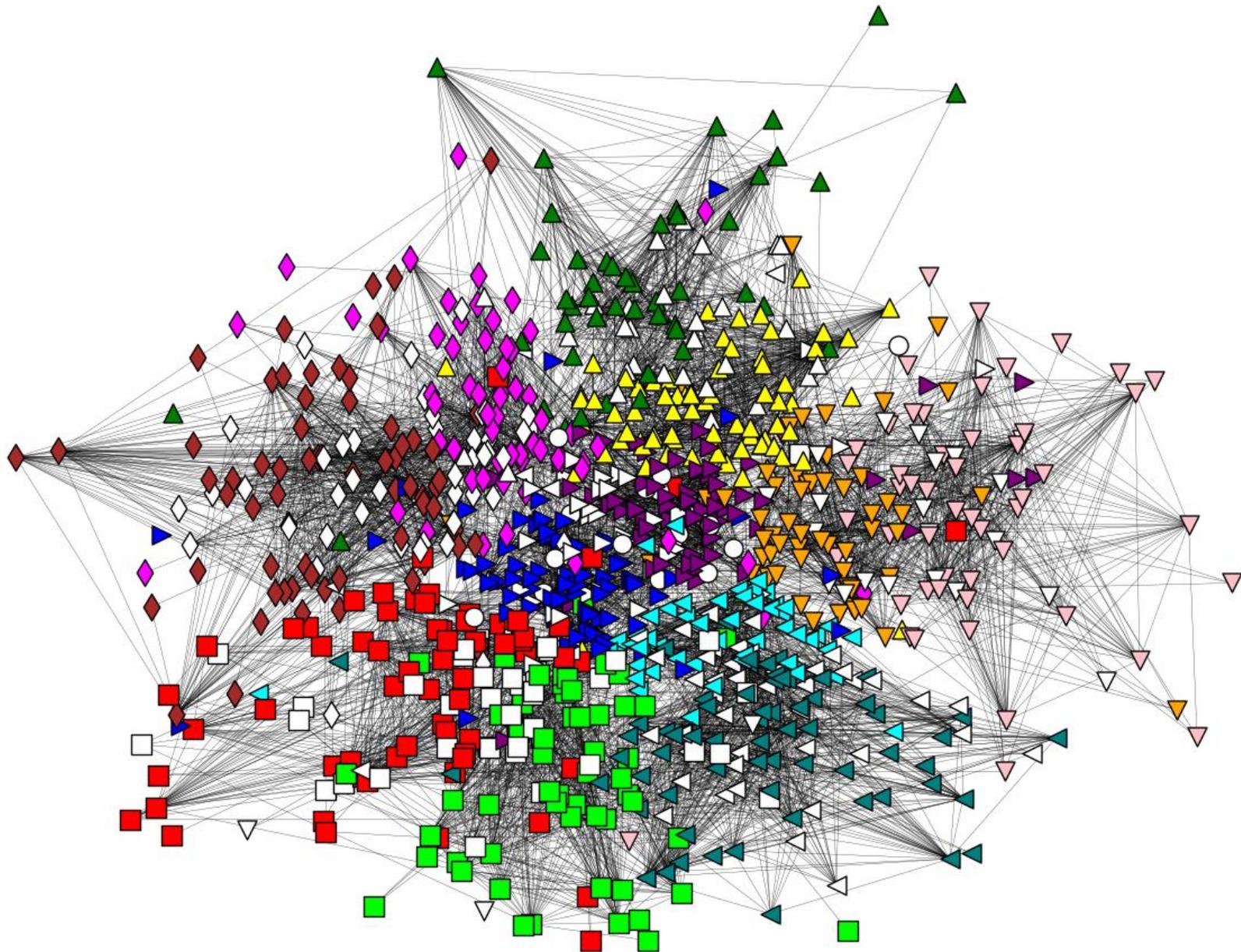


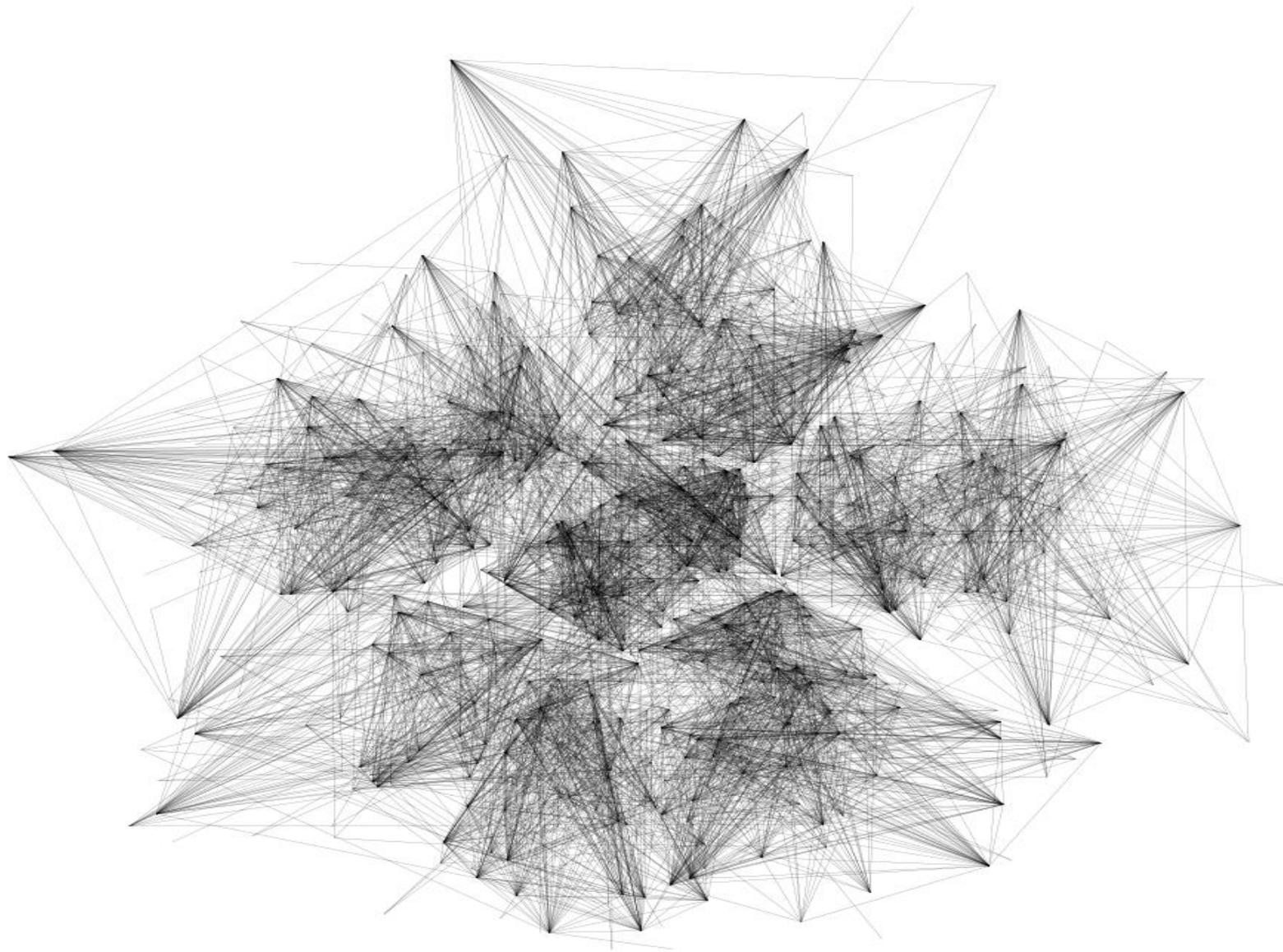


Análise dos Resultados

- Visualização

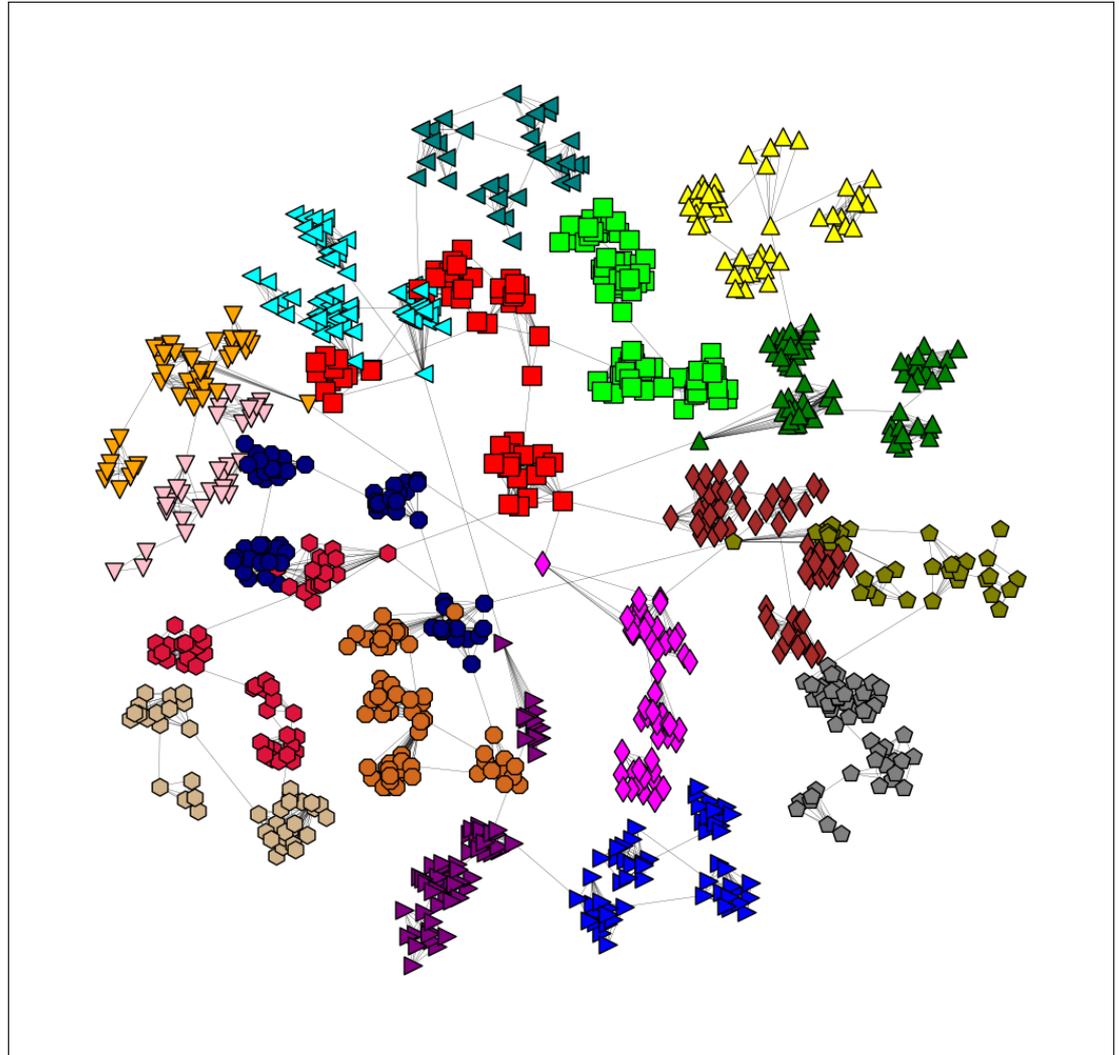


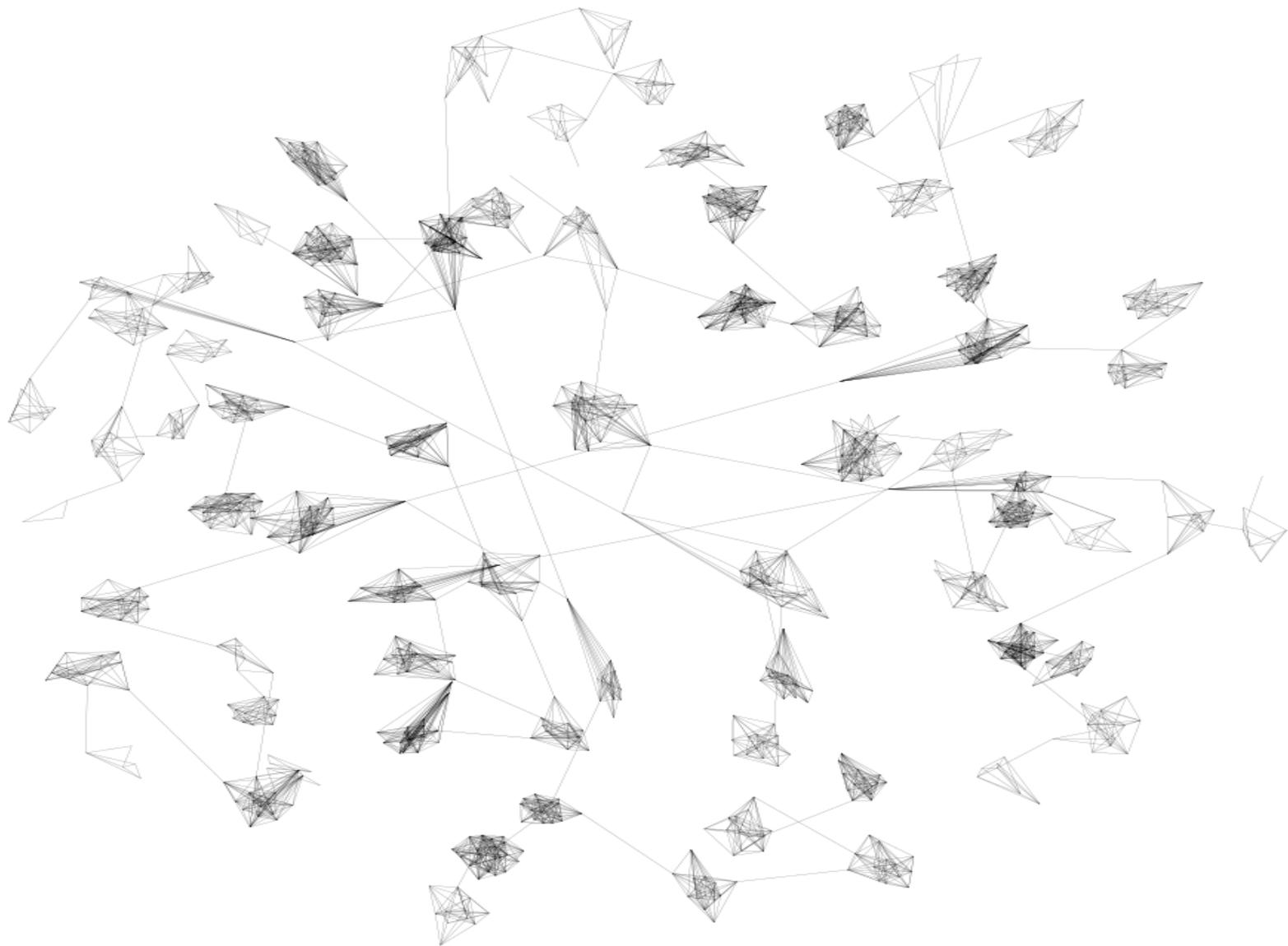




Análise dos Resultados

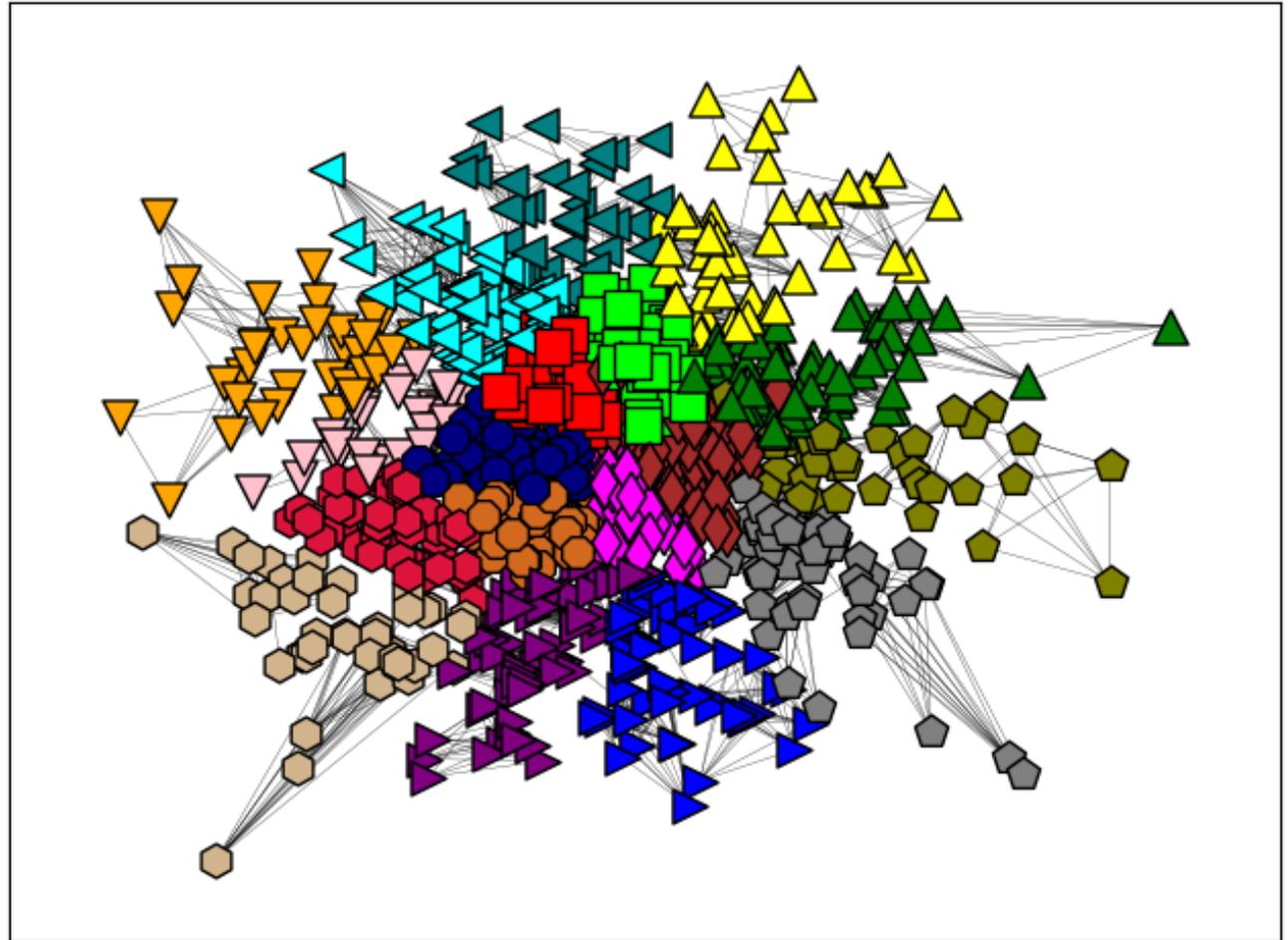
- Visualização

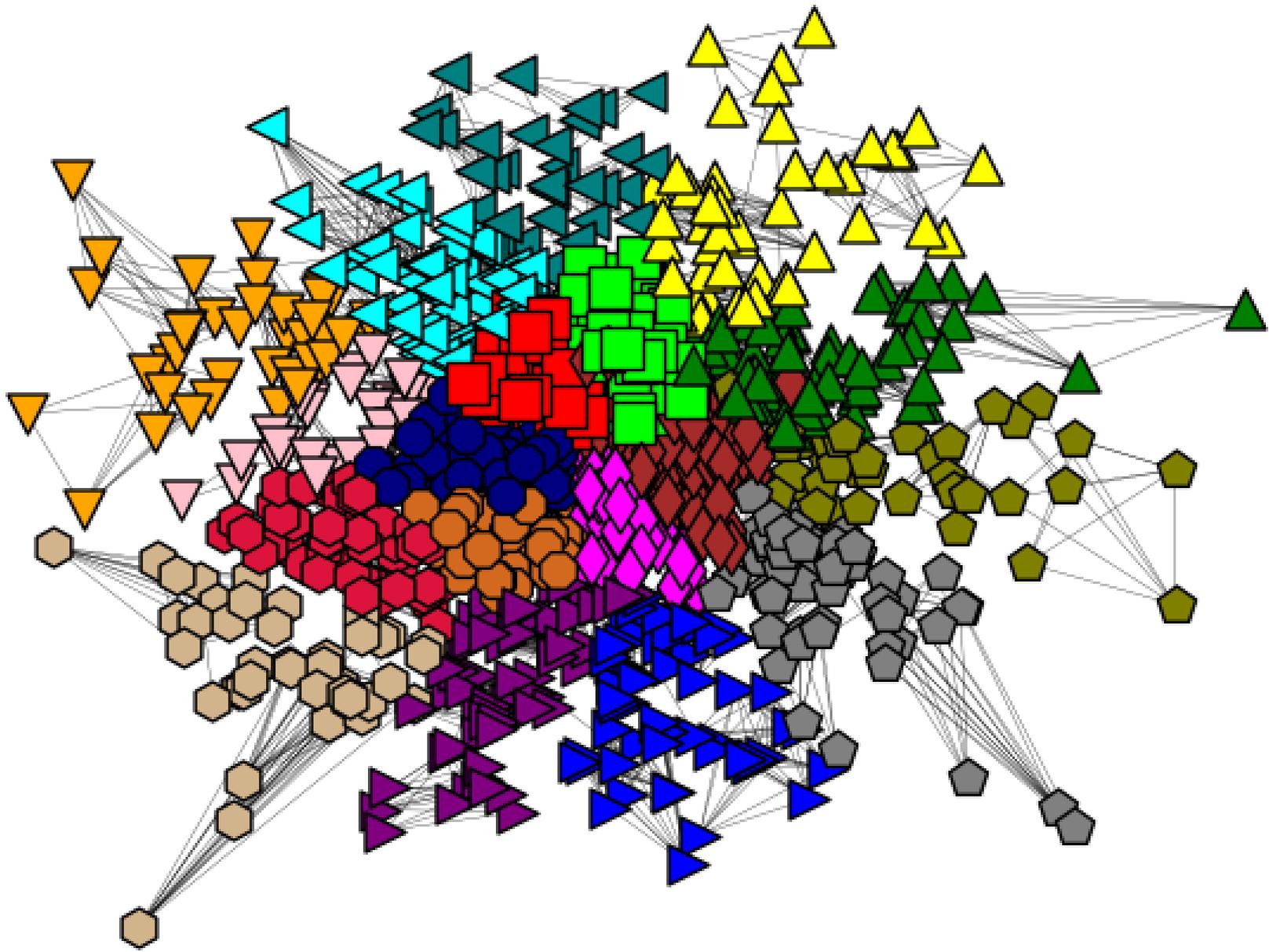


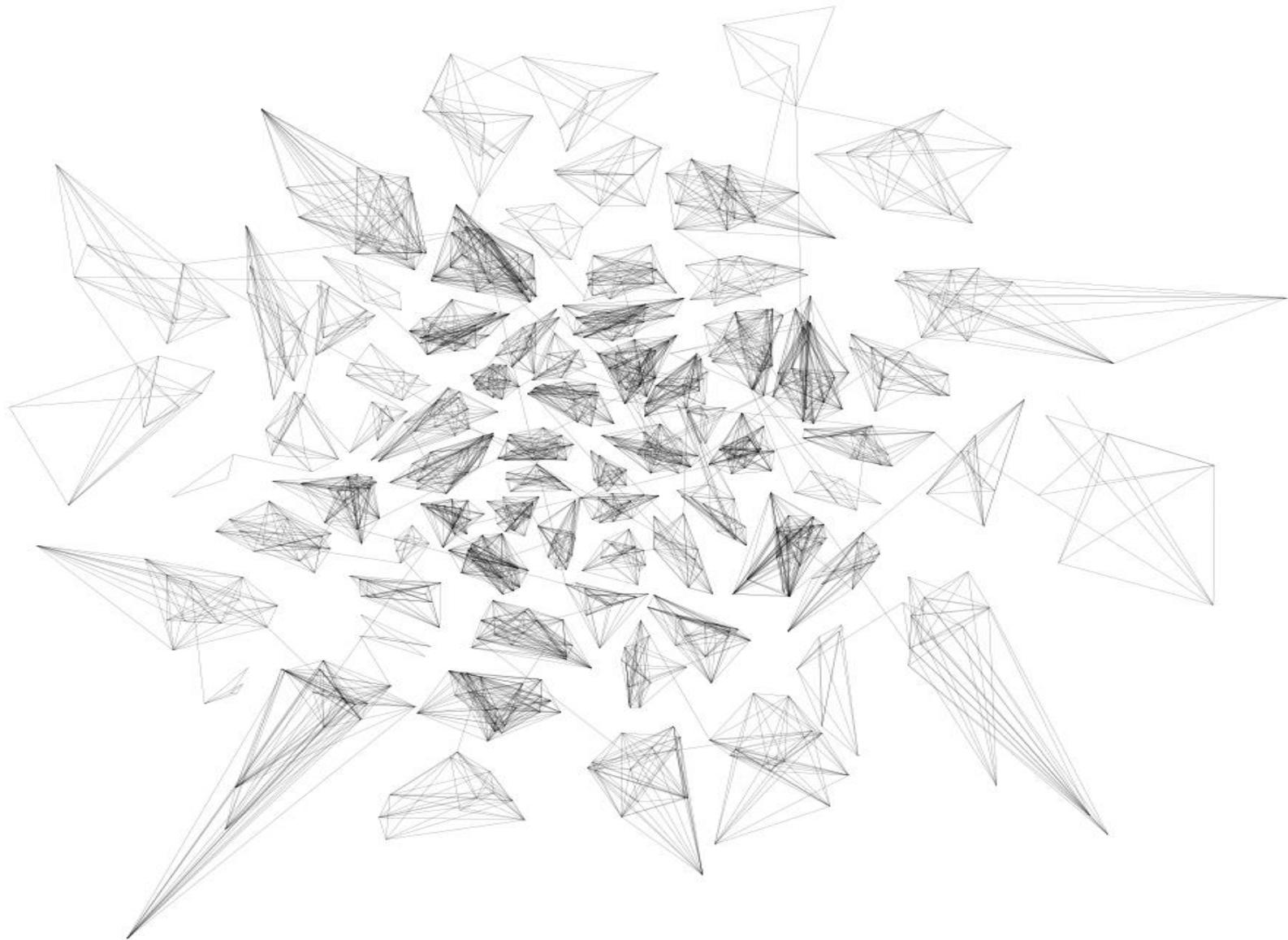


Análise dos Resultados

- Visualização







Conclusões

- O modelo pode gerar redes complexas consistentemente populadas com comunidades.
- A parametrização do modelo permite o reforço de determinadas propriedades.
- O trabalho apresenta uma revisão bibliográfica relevante em língua portuguesa.

Extensões

- Otimização para percolação de clique
- Reengenharia do processo de escolha de comunidade para melhor parametrização de quantidade de arestas em sobreposição.
- Reengenharia do processo de eleição de representantes.
- Extensão da influência da ortogonalidade na função de distância.

Obrigado!